Exercice 1. Soit V un espace vectoriel euclidien et W_1, W_2 deux sous-espaces vectoriels de V. Démontrer soigneusement les propriétés suivantes :

1. Si $W_1 \subset W_2$, alors $W_2^\perp \subset W_1^\perp$.
2. $(W_1^\perp)^\perp = W_1$.
3. $(W_1 + W_2)^\perp = W_1^\perp \cap W_2^\perp$.
4. $W_1^\perp + W_2^\perp = (W_1 \cap W_2)^\perp$.

Exercice 2. On considère les matrices réelles

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad S_\varphi = \begin{pmatrix} \cos(2\varphi) & \sin(2\varphi) \\ \sin(2\varphi) & -\cos(2\varphi) \end{pmatrix}$$

1. Prouver que ces matrices appartiennent à $\mathrm{O}(2)$.
2. Appartiennent-elles à $\mathrm{SO}(2)$?
3. Sans faire aucun calcul, prouver que S_φ est diagonalisable comme matrice réelle.
4. Calculer $S_\varphi^2 = S_\varphi \circ S_\varphi$. En déduire le polynôme minimal, puis une autre preuve que S_φ est diagonalisable comme matrice réelle (toujours sans faire de calcul).
5. Trouver les valeurs propres complexes de R_θ. A quelle condition sur θ cette matrice est-elle diagonalisable comme matrice réelle ?
6. A quelle condition sur θ la matrice R_θ est-elle diagonalisable comme matrice complexe ?
7. Prouver que R_θ est une matrice de rotation. Plus précisément montrer que l'angle entre v et $R_\theta v$ est indépendant du vecteur (non nul) $v \in \mathbb{R}^2$. Que vaut cet angle ?
8. Calculer le produit $R_\theta R_\varphi$. Expliquer pourquoi ce résultat donne une preuve des formules d'additions pour le cosinus et le sinus.
9. Calculer $S_\varphi \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix}$. Puis diagonaliser S_φ.

Exercice 3.

1. Rappeler ce que signifie *diagonaliser orthogonalement* une matrice réelle.
2. Démontrer que si une matrice réelle $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ est orthogonalement diagonalisable, alors elle est symétrique.
3. La réciproque de l'affirmation (b) est elle correcte ?
4. Diagonaliser orthogonalement la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \\ -1 & \sqrt{2} & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 4. On rappelle qu'une *forme quadratique* sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel V est une application $Q : V \to \mathbb{K}$ pour laquelle il existe une forme bilinéaire $\beta : V \times V \to \mathbb{K}$ telle que

$$Q(v) = \beta(v, v).$$

(On suppose que le corps $\mathbb{K}$ n'est pas de caractéristique 2).

1. Montrer que dans cette définition on peut supposer sans perte de généralité que β est symétrique (i.e $\beta(v, w) = \beta(w, v)$).
2. Démontrer que la forme bilinéaire symétrique β est déterminé par Q.
3. Vérifier que $Q(\lambda\, v) = \lambda^2 Q(v)$ pour tout $\lambda \in K$ et tout $v \in V$.
4. La réciproque est-elle valable ? i.e. est-ce que toute application $Q : V \to \mathbb{K}$ vérifiant $Q(\lambda v) = \lambda^2 Q(v)$ est une forme quadratique ?

Exercice 5. Écrire les forme quadratiques suivantes comme somme de carrés de formes linéaires :

$$Q_1(x, y) = 4\,y^2 + 8\,xy, \qquad Q_2(x, y, z) = 4\,x^2 - y^2 + 7\,z^2 - 4\,xy + 12\,xz - 10\,yz.$$

(ici, (x, y) sont les deux coordonnées d'un vecteur de $\mathbb{R}^2$ et (x, y, z) sont les trois coordonnées d'un vecteur de $\mathbb{R}^3$).

Exercice 6. Si Q est une forme quadratique définie sur un espace vectoriel V, on dit qu'un vecteur $v \in V$ est *isotrope* pour Q si $Q(v) = 0$.

Prouver l'affirmation suivante ou donner un contre-exemple :

Si tous les vecteurs d'une base de V sont isotropes, alors Q est identiquement nulle.

Exercice 7. Laquelle parmi les fonctions suivantes n'*est pas* une forme quadratique :

- ☐ $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, défini par $Q(x_1, x_2, x_3) = |x_1 - x_2 + x_3|^2$.
- ☐ $Q : C^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, défini par $Q(f) = \displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)f''(t)dt$.
- ☐ $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, défini par $Q(x_1, x_2, x_3) = (|x_1 - x_2| + |x_3|)^2$.
- ☐ $Q : \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, défini par $Q(A) = \det(A)$.

Exercice 8. (a) Démontrer que pour toute matrice $A \in \mathrm{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, il existe une matrice orthogonale $P \in \mathrm{O}(n)$ et $\mu_1, \dots, \mu_n \geq 0$ tels que

$$P^\top A^\top A P = \begin{pmatrix} \mu_1^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_n^2 \end{pmatrix}.$$

Les nombres $\mu_1, \dots, \mu_n$ s'appellent les *valeurs singulières de la matrice A.*

(b) Calculer les valeurs singulières de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = (1\ 0\ 2)$.